Solution 3 :

1°/ $U_1 = \sum_{p=1}^{1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{1^2} = 1$

$U_2 = \sum_{p=1}^{2}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$

2°/ $U_{n+1} - U_n = \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$

D'où (U_n) est une suite croissante

3°/

a) • $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{(p-1)p}$

• $\frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{(p-1)-p}{p^2(p-1)} = \frac{-1}{p^2(p-1)}$

D'où : $\frac{1}{p^2} \le \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

b) On a : $\frac{1}{p^2} \le \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ pour tout $p \ge 2$

D'où : $\forall n \ge 2$ on a :

$$\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^2} \le \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}$$

$$U_n - 1 \le \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$$

$$U_n - 1 \le 1 - \frac{1}{n}$$

$$U_n \le 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$\Rightarrow$ (U_n) est majorée par 2

4°/ $\begin{cases} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (U_n) \text{ est majorée par 2} \end{cases}$ Alors (U_n) est convergente